机床位置伺服系统的正交反馈-前馈补偿方法

韦进文* 王肃鹏 李东旭 郭志俊
广西大学机械工程学院，南宁，530004

摘要：为提高机床反馈-前馈控制系统的补偿效果，基于广义叉积提出一种传递函数为Φ_1、前馈控制器为$1/\Phi_1$的正交反馈-前馈复合控制系统。单位阶跃响应显示该复合控制系统的鲁棒性远强于最佳二阶系统。蒙特卡洛法仿真与机床加工实验表明，该复合控制系统加工误差也远小于最佳二阶系统，证明正交反馈增强闭环的鲁棒性，前馈控制提高稳态性能，正交反馈与前馈控制的结合可提高机床加工精度。

关键词：前馈控制；复合控制；鲁棒控制；铣床；加工精度
中图分类号：TP659
DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.07.021 **开放科学(资源服务)标识码(OSID)**：

Orthogonal Feedback-Feedforward Compensation Method for Machine Tool Position Servo Systems

WEI Jinwen* WANG Supeng LI Dongxu GUO Zhijun
School of Mechanical Engineering, Guangxi University, Nanning, 530004

Abstract: To improve the compensation performance of feedback-feedforward control systems for machine tools, this paper proposes an orthogonal feedback-feedforward composite control system based on generalized cross-product, in which the closed-loop transfer function is Φ_1 and the feedforward controller is $1/\Phi_1$. Unit step response tests demonstrate that the proposed system exhibits significantly higher robustness than the optimal second-order system. Monte Carlo simulations and machining experiments further reveal that the machining errors of the composite system are substantially lower than those of the optimal second-order system. These results indicate that orthogonal feedback enhances closed-loop robustness, while feedforward control improves steady-state performance. The combination of the two control strategies effectively enhances the machining accuracy of machine tools.

Key words: feedforward control; composite control; robust control; milling machine; machining accuracy

0 引言

数控机床通常在反馈控制的基础上引入前馈补偿，根据输入及其与反馈信号的差值进行控制决策，减小扰动给刀具运动造成的不利影响，增强系统对参考输入的跟踪能力。

前馈补偿是数控机床加快系统响应、提高加工精度的重要技术[1]，补偿对象是扰动与参考输入。机床扰动补偿的研究集中于摩擦[2-3]与负载[4]。将扰动信号前馈到系统控制指令处可减小扰动对系统的影响[5]。参考输入的前馈方式包括前置式与层叠式。前置式的控制器与闭环相串联，其典型应用是零相位误差跟踪控制(zero phase error tracking control, ZPETC)[6]。为提高系统快速性并减小跟踪误差，实现输入指令的全补偿，前馈控制器D_{FF}取反馈闭环传递函数Φ的倒数，即$D_{FF}=1/\Phi$，使输入到输出的传递函数尽量接近1。

前置式补偿器对模型误差非常敏感，Φ存在靠近-1或非最小相位零点时，D_{FF}会剧烈振荡甚至不稳定[7]。在D_{FF}中附加零点来抵消Φ的非最小相位零点[8]或采用最优自适应方法实时估算负载和扰动，可实现机床指令的零相位误差跟踪[9]。但D_{FF}中附加的零点并不能真正抵消闭环中具有不确定性的零点，最优自适应方法对扰动的估算严重依赖系统参数准确性，因此这两种方法的作用有限。

三环结构的伺服系统中，电流环与速度环通常用层叠式前馈补偿。通过前馈控制器将补偿量嵌入被控对象不会影响闭环稳定性，但机床的复杂结构导致基于系统原型的补偿量计算复杂，还容易受参数不准确的影响[10]。工程上常通过简化内环原型来实现补偿，但这会导致补偿量不准确[11]。为提高补偿准确性，学者提出模型跟踪控制(MFC)[12]、在线辨识[13]、状态观测器等算法来

收稿日期：2025-01-11
基金项目：广西科学研究与技术开发计划(10100001-2)

估计系统的转动惯量[14]、摩擦因数[2]等模型参数，或先用参考模型自适应(MRAS)算法在线辨识负载惯量[15]、再将估计的模型及其参数用于前馈控制器参数的实时调节。这些方法取得一定效果，但算法复杂、计算量大，且并非所有参数都可准确估计。

工程实现中，有时需要使用简化的输入前馈控制器，如三环伺服系统将一阶或二阶微分串联比例环节作为速度环与电流环的前馈控制器。对于阶跃等变化剧烈且非连续的输入，位置环的增益小导致稳态误差大，而增益大则导致超调大，使前馈补偿的效果甚微甚至完全无效[16]。为抑制超调量，黄科元等[17]在位置环引入微分负反馈，但微分运算易放大反馈噪声，削弱补偿效果。陆浩等[18]在前馈环节引入跟踪微分器，采用指令微分前馈整形剧烈变化的输入曲线。该方法实现了对小幅阶跃输入的快速无超调跟踪，但无法消除大幅阶跃输入引起的超调，且存在连续信号跟踪滞后、参数调整复杂等问题[19]。

前馈补偿的理想目标是扰动到输出的传递函数接近0(扰动抑制)与参考输入到输出的传递函数接近1(跟踪复现)。无论是前置式还是层叠式，前馈控制器一般包含被控或闭环对象传递函数的倒数或微分/高阶微分，补偿效果严重依赖被控对象模型的精度[13]。机床模型不准确或存在不确定摄动会削弱补偿效果甚至适得其反。MFC、MRAS等算法有一定鲁棒性，但它们的复杂性影响了快速性与补偿效果，降低其在前馈补偿中的应用价值。

本文将广义叉积鲁棒定理用于数控铣床的前置式输入前馈补偿，最大限度抑制机床不确定度的影响，设计的前馈控制器可弥补鲁棒设计对稳态性能的限制，极大提高铣床的速度与精度。

1 基于广义叉积的鲁棒前馈补偿

1.1 广义叉积及其鲁棒定理

(1)定义。N个行向量构成$N\times(N+1)$维矩阵$\boldsymbol{A}$，其中，叉向量$\boldsymbol{A}_i=(a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,N+1})\in\mathbf{R}^{N+1}$，$i=1,2,\cdots,N$。叉矩阵$\boldsymbol{A}$的广义叉积(积向量)定义为

$$\boldsymbol{C}=\operatorname{cross}\boldsymbol{A}=(c_1,c_2,\cdots,c_{N+1}) \tag{1}$$

$$c_j=\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_j\\ \boldsymbol{E}_0\end{vmatrix}\quad j=1,2,\cdots,N+1$$

$$\boldsymbol{E}_j=[e_i]_{1\times(N+1)}$$

$$e_i=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}_0=\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N+1}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N+1}\end{bmatrix}$$

积向量$\boldsymbol{C}$的模

$$|\boldsymbol{C}|=\sqrt{|B|}\prod_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i|$$

$$B=\begin{bmatrix}\cos\beta_{1,1} & \cos\beta_{1,2} & \cdots & \cos\beta_{1,N}\\ \cos\beta_{2,1} & \cos\beta_{2,2} & \cdots & \cos\beta_{2,N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos\beta_{N,1} & \cos\beta_{N,2} & \cdots & \cos\beta_{N,N}\end{bmatrix}$$

式中：$\beta_{i,j}$为叉向量$\boldsymbol{A}_i$与$\boldsymbol{A}_j$的夹角。

广义叉积具有与三维叉积相同的性质，如叉矩阵$\boldsymbol{A}$与积向量$\boldsymbol{C}$正交即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=0$。

(2)鲁棒定理。叉向量$\boldsymbol{A}_j$的微小不确定性变化$\Delta\boldsymbol{A}_j$引起的积向量$\boldsymbol{C}$变化为$\Delta\boldsymbol{C}$，若$\boldsymbol{A}_j$与$\boldsymbol{A}$中其他叉向量均正交，则积向量$\boldsymbol{C}$对$\Delta\boldsymbol{A}_j$的鲁棒性最强即$\Delta|\boldsymbol{C}|/|\boldsymbol{C}|$最小。所有叉向量相互正交时，积向量对其叉矩阵变化的鲁棒性最强。

证明[20]：定义叉向量$\boldsymbol{A}_j$的补向量

$$\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{c}}=\operatorname{cross}[\boldsymbol{A}_1\ \ \boldsymbol{A}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A}_{j-1}\ \ \boldsymbol{C}/|\boldsymbol{C}|\ \ \boldsymbol{A}_{j+1}\ \ \boldsymbol{A}_{j-2}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A}_N]^{\mathrm{T}}$$

则有点积$\boldsymbol{A}_j\cdot\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{c}}=|\boldsymbol{A}_j||\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{c}}|\cos\alpha_j=-|\boldsymbol{C}|$，再由$|\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{c}}|=\sqrt{|B(j,j)|}\prod_{i=1}^{N}|\boldsymbol{A}_i|/|\boldsymbol{A}_j|$得

$$\cos\alpha_j=-\sqrt{\frac{|B|}{|B(j,j)|}} \tag{2}$$

其中，$B(j,j)$为矩阵B删除第j行和第j列后得到的矩阵，且满足$0\leqslant|B|\leqslant|B(j,j)|\leqslant1$；正交角$\alpha_j$描述$\boldsymbol{A}_j$与$\boldsymbol{A}$中其他叉向量的方位关系，$\alpha_j\in(\pi/2,\pi]$。若$\alpha_j=\pi$，则$\boldsymbol{A}_j$与$\boldsymbol{A}$中其他叉向量正交；若$\alpha_j\to\pi/2$，则$\boldsymbol{A}_j$与$\boldsymbol{A}$中其他叉向量趋于平行。$\boldsymbol{A}_j$有增量$\Delta\boldsymbol{A}_j$时，积向量$\boldsymbol{C}$的增量为$\Delta\boldsymbol{C}$，由$|\boldsymbol{C}|=-|\boldsymbol{A}_j||\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{c}}|\cos\alpha_j=\sqrt{|B|}\prod_{i=1}^{n}|\boldsymbol{A}_i|$得叉向量$\boldsymbol{C}$模的变化率$\dfrac{\Delta|C|\big|_{\Delta A_j}}{|C|}=\dfrac{\Delta|A_j|}{|A_j|}-\Delta\alpha_j\tan\alpha_j$，以及积向量模的变化率$\dfrac{\Delta|C|\big|_{\Delta A}}{|C|}=\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\Delta|A_j|}{|A_j|}-\Delta\alpha_j\tan\alpha_j\right)$。$\alpha_j=\pi$时，$-\Delta\alpha_j\tan\alpha_j=0$，$\boldsymbol{C}$对$\boldsymbol{A}_j$的变化最小即鲁棒性最强；$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\pi$时，$\boldsymbol{C}$对$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、…、$\boldsymbol{A}_n$变化的鲁棒性最强。

证毕。

对高维叉矩阵，用式(1)计算积向量较麻烦，故提出快速算法：先用叉矩阵构造的方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=0$得一个确定解$\boldsymbol{X}$。如果$\boldsymbol{X}$的第$j$个元素$x_j\neq0$，则仅需计算积向量相应的第$j$个元素$c_j$；再由叉积正交性质$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=0$得到积向量

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{X}c_j/x_j \tag{3}$$

由于c_j/x_j为常数，所以$\boldsymbol{C}$与$\boldsymbol{X}$平行且鲁棒性质相同。

1.2　基于广义叉积的系统鲁棒机理与设计方法

积向量模摄动由相互独立的叉向量模摄动与叉向量方位摄动构成，正交时，第j个叉向量的方位摄动灵敏度$\tan\alpha_j$为0，对积向量无影响。任意一个确定解$\boldsymbol{X}$与积向量平行且鲁棒性质相同。广义叉积鲁棒定理表明，若叉矩阵各行相互正交，则矩阵元素变异对积向量$\boldsymbol{C}$或叉矩阵方程组的任意一个确定解$\boldsymbol{X}$影响最小。将广义叉积鲁棒定理用于系统设计可增强鲁棒性。下面以二阶对象为例阐述鲁棒前馈补偿原理，假设二阶对象的传递函数为

$$G(z)=\frac{C(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

式中：$C(z)$为被控物理量；$U(z)$为控制器的输出；a_1、a_2、b_0、b_1、b_2为确定的系数。

将该传递函数转换成可控标准型的状态空间表达式：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v}(n+1)&=\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}(n)+\boldsymbol{H}u(n)\\ c(n)&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}(n)+\boldsymbol{Q}u(n)\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

并用状态反馈构造闭环，其中，控制器的控制律为

$$u(n)=k_{\mathrm{r}}r(n)-\boldsymbol{L}\boldsymbol{v}(n)\tag{5}$$

式中：k_{r}为调节稳态误差的前置增益（待设计）；$r(n)$为闭环参考输入，即前馈控制器的输出；$\boldsymbol{L}$为状态反馈矩阵（待设计），$\boldsymbol{L}=[l_1\ l_2]$；$\boldsymbol{v}(n)$为状态向量。

式(5)的状态反馈控制律可使相应的闭环（传递函数记为Φ_1）仍为二阶系统，且零点与开环相同。由此得到名义闭环传递函数

$$\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{k_{\mathrm{r}}(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})}{1+a_{11}z^{-1}+a_{22}z^{-2}}=\frac{k_{\mathrm{r}}(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})}{1+(l_2+a_1)z^{-1}+(l_1+a_2)z^{-2}}\tag{6}$$

将式(6)的差分方程

$$c(n)+a_{11}c(n-1)+a_{22}c(n-2)-k_{\mathrm{r}}b_0r(n)-k_{\mathrm{r}}b_1r(n-1)-k_{\mathrm{r}}b_2r(n-2)=0\quad n=2,3,\cdots,N$$

写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=0\tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}=[A_{ij}]_{(N-1)\times(2N+2)}=\begin{cases}1 & i=j=1,2,\cdots,N-1\\ a_{11} & i=j-1=1,2,\cdots,N-1\\ a_{22} & i=j-2=1,2,\cdots,N-1\\ -b_0 & i=j-N+1=1,2,\cdots,N-1\\ -b_1 & i=j-N+2=1,2,\cdots,N-1\\ -b_2 & i=j-N+3=1,2,\cdots,N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{C}=(c(N),c(N-1),\cdots,c(0),r(N),r(N-1),\cdots,r(0))$$

通过求解矩阵$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}$的方程组$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}=0$，得一个$(N+2)\times(2N+2)$的行正交矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{d}}=[\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{d}}\quad\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{d}}\quad\cdots\quad\boldsymbol{A}_{N+2}^{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{d}}$与$\boldsymbol{A}$可组合成一个$(2N+1)\times(2N+2)$的叉矩阵$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}$为$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}}$的积向量或与积向量平行的叉矩阵方程组的一个解。由于行向量正交的常数矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{d}}$仅与$\boldsymbol{A}$和输入序列$r(n)$有关，故$\boldsymbol{A}$是与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{d}}$及输入无关的离散系统描述，称之为系统叉矩阵。

式(7)中，若$\boldsymbol{A}$中各行相互正交，则叉矩阵$[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}}$完全正交，积向量$\boldsymbol{C}=(c(n),\boldsymbol{r}(n))$或叉矩阵方程组的解对被控对象的参数$a_1$、$a_2$、$b_0$、$b_1$、$b_2$变化最不敏感，即$\boldsymbol{C}$变化最小。由于$\boldsymbol{C}$中的$r(n)$是确定的输入序列，$\boldsymbol{C}$变化最小实际上是输出序列$c(n)$的变化最小；反之，若$\boldsymbol{A}$的正交度低，则系统的微小摄动可引起$c(n)$剧变，急剧偏离其期望（名义）序列。

系统叉矩阵$\boldsymbol{A}$中每一行向量与相隔2行以外的其他行向量自然正交。因此，只需使任意连续三行$\boldsymbol{A}_j$、$\boldsymbol{A}_{j+1}$、$\boldsymbol{A}_{j+2}$相互正交，即可实现$\boldsymbol{A}$中各叉向量的相互正交。由此，闭环正交鲁棒性条件为

$$\left.\begin{aligned}a_{11}(1+a_{22})+k_{\mathrm{r}}^2b_1(b_0+b_2)&=0\\ a_{22}+k_{\mathrm{r}}^2b_0b_2&=0\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

再考虑闭环系统（式(6)）的稳态性能及稳定性。由终值定理可得单位阶跃输入的稳态误差

$$e_{\mathrm{ss}}=1-\frac{k_{\mathrm{r}}(b_0+b_1+b_2)}{1+a_{11}+a_{22}}\tag{9}$$

而由朱利判据得闭环稳定条件为

$$\left.\begin{aligned}k_{\mathrm{r}}^2|b_1(b_0+b_2)|&<(k_{\mathrm{r}}^2b_0b_2-1)^2\\ k_{\mathrm{r}}^2|b_0b_2|&<1\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

综合式(8)～式(10)可确定使闭环系统（式(6)）满足鲁棒性、稳定性，以及指定稳态误差为e_{ss}的k_{r}、a_{11}、a_{22}。最后，根据$a_{11}=(l_2+a_1)$与$a_{22}=(l_1+a_2)$，得状态反馈矩阵$\boldsymbol{L}=[a_{22}-a_2\quad a_{11}-a_1]$。

由此，用状态反馈控制器（式5）构成的闭环系统$\Phi_1(z)$因叉矩阵正交而鲁棒性最强。对于给定输入$R(z)$，即使实际对象$g(z)$与名义对象$G(z)$的差异使实际闭环传递函数变为$\phi_1(z)$，闭环系统的实际输出$\phi_1(z)\ R(z)$也能最大限度接近预期输出$\Phi_1(z)R(z)$。这说明实际闭环$\phi_1(z)$对名义闭环$\Phi_1(z)$的偏离受对象不确定性摄动的影响最小。图1中，前置的前馈控制器$D_{\mathrm{FF}}(z)=1/\Phi_1(z)$使参考输入到输出的实际传递函数$D_{\mathrm{FF}}(z)\phi_1(z)$更接近1，从而提高跟踪精度与响应速度，改善系统的控制性能。

1.3　正交反馈设计的系统性能

式(8)对闭环设计是一种强约束。由式(9)可知，这种约束实际上是对象传递函数的分子多项

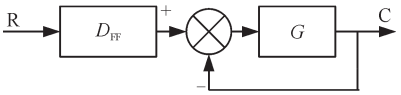


图1 前置式前馈输入补偿

Fig.1 Preview feedforward compensation

式系数b_0～b_2(开环零点对闭环极点与增益)的约束,因此不能任意配置闭环极点,使正交反馈无法兼顾闭环系统的鲁棒性与动态、稳态性能。

很多情况下,若要求$e_{ss}=0$,则式(8)～式(10)可能无解。此时,只能适当降低闭环的稳态性能要求,将e_{ss}作为可调参数,取一个合适的非0值代入式(8)～式(10),求得满足鲁棒性与稳定性的闭环正交极点;而系统稳态误差则通过前馈补偿消除。

2 设计实例

2.1 建模

建立图2a所示数控铣床的模型,然后采用传统方法与正交反馈法各设计一个前馈-反馈复合系统,并通过加工精度来评价算法的鲁棒性。铣床进行X-Y平面加工时,Z轴不动,X轴、Y轴联动。各轴传动链由直流电动机及其H桥驱动器、减速器、丝杆螺母及滑架组成。

将铣床系统简化为图2b所示的框架模型,其中,龙门架与滑架分别用带质点的刚性线框表示;机构变形导致的刀具偏移视为由扭簧S_1、S_2的扭转造成。以X光栅尺起点为原点O、X轴平行于工作台主导轨轴线方向、Y轴平行于滑架导轨轴线方向,建立如图所示的右手坐标系$OXYZ$;忽略弹性元件尺寸。在外力与惯性力作用下,弹性元件产生变形,引起坐标为(x, y, z_{B2})的刀尖B_2在X、Y向的动态偏移分别为

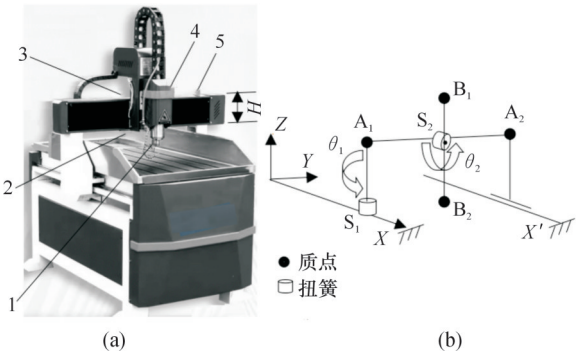
$$\Delta x=z_{B2}\theta_1^Y-y\theta_1^Z-(z_{S2}-z_{B2})\theta_2^Y$$
$$\Delta y=-z_{B2}\theta_1^X+(z_{S2}-z_{B2})\theta_2^X$$

其中,θ_1^Y为弹性元件S_1的扭转变形,其上标X、Y、Z分别表示绕X、Y、Z轴转动。将加工平面置于OXY平面上靠近副导轨X'一侧,则$z_{B2}\approx 0$,$|\theta_1^Y|\ll|\theta_1^Z|$;$B_1$、$B_2$绕$Y$轴的惯性力矩大小相近、方向相反,使得弹性元件$S_2$绕$Y$轴的变形很小,即$\theta_2^Y\approx 0$。由此,$\Delta x$的表达式只保留$-y\theta_1^Z$,$\Delta y$的表达式保留$(z_{S2}-z_{B2})\theta_2^X$。记$\theta_1=\theta_1^Z$,$\theta_2=\theta_2^X$,并分别代入$\Delta x$、$\Delta y$的表达式,可建立几何关系:

$$\left.\begin{aligned}c_x&=x_i+\Delta x=x_i-y\theta_1\\c_y&=y_i+\Delta y=y_i-z_2\theta_2\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

式中:x_i、y_i分别为龙门架与滑架的位移;c_x、c_y分别为刀具的X向位移和Y向位移;z_2为刀尖到S_2的距离。

据D'Alembert原理,得X向力的平衡方程



1.Z-主轴 2.Y光栅尺 3.Y'光栅尺 4.Y滑架 5.X龙门架

图2 铣床及其框架模型

Fig.2 The milling machine and its dynamic model

$$F_{S2}-(m_{B1}+m_{B2})(\ddot{x}_i-\ddot{\theta}_1 y)-F_x=0\tag{12}$$

及绕Z轴、X轴的转矩平衡方程:

$$\left.\begin{aligned}&F_{S2}y+m_{A2}y_{A2}(\ddot{x}_i-\ddot{\theta}_1 y_{A2})-k_1\theta_1-c_1\dot{\theta}_1=0\\&m_{B1}(z_{B1}-z_{S2})[\ddot{y}_i-\ddot{\theta}_2(z_{B1}-z_{S2})]-F_y z_{S2}-\\&m_{B2}z_{S2}(\ddot{y}_i+\ddot{\theta}_2 z_{S2})-k_2\theta_2-c_2\dot{\theta}_2=0\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

式中:F_{S2}为S_2处的X向内力;m_i为质点i的质量,i=1,2;k_i、c_i分别为S_i的扭转刚度和阻尼系数;y_i、z_i分别为元件i的Y轴坐标和Z轴坐标;F_x、F_y分别为刀具的X向与Y向切削阻力,并假设切削阻力与切削速度成正比[21],比例系数为k_{cx}、k_{cy}。

由式(11)～式(13)描述的系统是可解耦的。将式(12)、式(13)中的各微分方程对Y滑架的位置参数y分段线性化,并结合式(11)可得x_i到c_x、y_i到c_y的传递函数:

$$\left.\begin{aligned}G_{2x}(s)&=\frac{m_{A2}y_{A2}(y_{A2}-y)s^2+c_1 s+k_1}{(m_{A2}y_{A2}^2+m_{B1}y^2)s^2+(k_{cx}y^2+c_1)s+k_1}\\G_{2y}(s)&=\\&\frac{m_{B1}z_{B1}(z_{B1}-z_{S2})s^2+c_2 s+k_2}{[m_{B1}(z_{B1}-z_{S2})^2+m_{B2}z_{S2}^2]s^2+(k_{cy}z_{S2}^2+c_2)s+k_2}\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

龙门架与Y滑架前端其他传动部件的时间常数远小于$G_{2x}(s)$、$G_{2y}(s)$的时间常数,故分别用比例系数K_x、K_y来近似从控制器输出信号u_x到x_i、u_y到y_i的传递函数[22]。则u_x到c_x、u_y到c_y的传递函数分别为

$$\left.\begin{aligned}G_x(s)&=K_x G_{2x}(s)\\G_y(s)&=K_y G_{2y}(s)\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

式(15)中的$G_x(s)$、$G_y(s)$均为二阶系统传递函数,对应的脉冲传递函数$G_x(z)$、$G_y(z)$亦是二阶形式(分子分母都是二次多项式)。基于该模型结构,通过实验辨识$G_x(z)$与$G_y(z)$的具体参数。实验(采样周期T=1 ms)时,将激光干涉仪检测的刀具位移$c(nT)$作为系统输出,将控制信号序列$u(nT)$作为系统输入。辨识实验结果即X轴(y=0.72 m)、Y轴的脉冲传递函数分别为

$$\left.\begin{aligned}G_x(z)&=\frac{C_x(z)}{U_x(z)}=\frac{0.2537-0.03276z^{-1}+0.224z^{-2}}{1-1.193z^{-1}+0.6288z^{-2}}\\G_y(z)&=\frac{C_y(z)}{U_y(z)}=\frac{0.3601-0.07503z^{-1}+0.04502z^{-2}}{1-0.4734z^{-1}-0.1863z^{-2}}\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

上述建模过程忽略了次要因素，如在传递函数$G_x(s)$的滑架位置参数y变化范围内将其视为分段常数，从而在各分段区间内将非线性系统近似为线性二阶模型。因此，由实验建模得到的机床名义模型(式(16))具有一定的不确定度。

2.2　闭环系统设计

对铣床各轴系统进行离散化反馈控制。为使闭环仍为二阶系统，将式(16)对象化为形如式(4)的状态空间表达式，再分别用传统极点配置与正交反馈两种方法，设计得到形如式(6)的二阶闭环系统。

2.2.1　传统极点配置设计

将传统方法设定设计目标[23]：使状态反馈的离散闭环系统性能等价于最佳阻尼比$\zeta=0.707$、无阻尼自然频率$\omega_n=900$ rad/s的二阶连续系统(闭环极点为$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$)，$T=1$ ms时，目标闭环极点$z_{1,2}=0.4256\pm i0.3146$；再取稳态误差$e_{ss}=0$；最后将配置的闭环极点、$e_{ss}$、传递函数$G_x(z)$的相应参数分别代入式(6)、式(9)，得$X$轴传统控制器$D_{0x}(z)$的状态反馈矩阵$\boldsymbol{L}_{x0}=[-0.3487\quad 0.3414]$与前置增益$k_{rx0}=0.9638$。对$Y$轴配置与$X$轴相同的闭环极点$0.4256\pm i0.3146$以及$e_{ss}=0$，得传统控制器$D_{0y}(z)$的状态反馈矩阵$\boldsymbol{L}_{y0}=[0.4664\quad -0.3778]$与前置增益$k_{ry0}=0.2897$。由此，得$X$、$Y$两轴常规最佳二阶闭环系统的名义传递函数$\Phi_{0x}(z)$与$\Phi_{0y}(z)$。

2.2.2　正交反馈设计

将式(16)的X轴对象传递函数$G_x(z)$的参数代入式(8)～式(10)进行正交化设计。稳态误差$e_{ss}=0$时，方程组无正交解；$e_{ss}=0.1$时，X轴正交控制器$D_{1x}(z)$的前置增益$k_{rx1}=1.2991$，状态反馈矩阵$\boldsymbol{L}_{x1}=[-0.809\quad 1.2531]$。用同样的方法解得$Y$轴正交控制器$D_{1y}(z)$的前置增益$k_{ry1}=3.3871$，状态反馈矩阵$\boldsymbol{L}_{y1}=[0.0003\quad 0.9019]$。最终，基于所提的正交设计法，得$X$、$Y$两轴闭环系统的名义传递函数$\Phi_{1x}(z)$、$\Phi_{1y}(z)$。

2.3　前馈补偿设计

采用前置式前馈补偿方案，使用名义闭环传递函数$\Phi_{0x}(z)$、$\Phi_{0y}(z)$、$\Phi_{1x}(z)$、$\Phi_{1y}(z)$构造前馈控制器：

$$D_{FFia}(z)=1/\Phi_{ia}(z)\quad i=0,1;a=x,y\tag{17}$$

前馈控制器与机床闭环构成反馈-前馈复合控制系统。图3所示为X轴的传统控制器组D_{0x}-D_{FF0x}、正交控制器组D_{1x}-D_{FF1x}分别与实际对象$g_x(z)$、名义对象$G_x(z)$组合成的4种复合系统，其中，图3a、图3b所示的名义复合系统的传递函数$\Phi_{0x}(z)$、$\Phi_{0x}(z)$都是1；图3c、图3d所示的实际复合系统传递函数$\phi_{0x}(z)$、$\phi_{1x}(z)$偏离1，导致实际性能与名义(预期)性能产生偏差(大小取决于闭环正交度)。

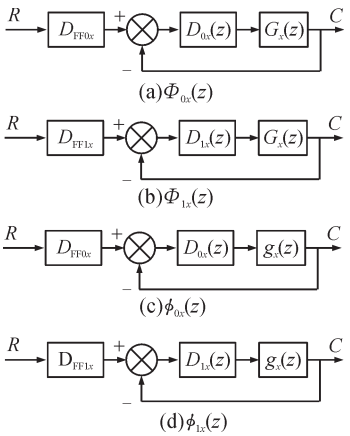


图3　四种闭环及其复合系统

Fig.3　Four closed-loops and corresponding composite systems

3　仿真与实验

3.1　单位阶跃响应

铣床的实际模型不可知，因此假设它与名义模型形式相同，但实际模型参数a_i与对应名义模型参数a_i满足关系$a_i\sim N(a_i,\sigma^2)$，其中，σ为模型的不确定度。假设式(16)中$G_x(z)$的不确定度$\sigma=10\%$，通过数值仿真生成X轴的一个实际对象：

$$g_x(z)=\frac{0.2645-0.02802z^{-1}+0.2578z^{-2}}{1-1.093z^{-1}+0.6351z^{-2}}\tag{18}$$

由此，将$g_x(z)$分别用于图3c与3d所示系统，可计算图3中4个闭环及图3c、图3d中实际复合系统的单位阶跃响应。如图4所示，两种名义闭环的动态性能相近，但$\Phi_{1x}(z)$存在稳态误差。传统设计的实际闭环响应曲线(红色)明显偏离名义曲线(绿色)，而正交设计的红绿两条响应曲线几乎完全重合，说明正交闭环鲁棒性强、受对象摄动影响很小。黑色曲线表示加上前馈补偿后的复合系统单位阶跃响应。相较于无前馈闭环$\phi_{0x}(z)$，传统复合系统$D_{FF0x}(z)\phi_{0x}(z)$缩短了调整时间，但不能消除闭环稳态误差，而正交复合系统$D_{FF1x}(z)\phi_{1x}(z)$既缩短了调整时间，又消除了稳态误差。

3.2　蒙特卡洛法仿真

单位阶跃响应仅验证了正交系统对单个“摄

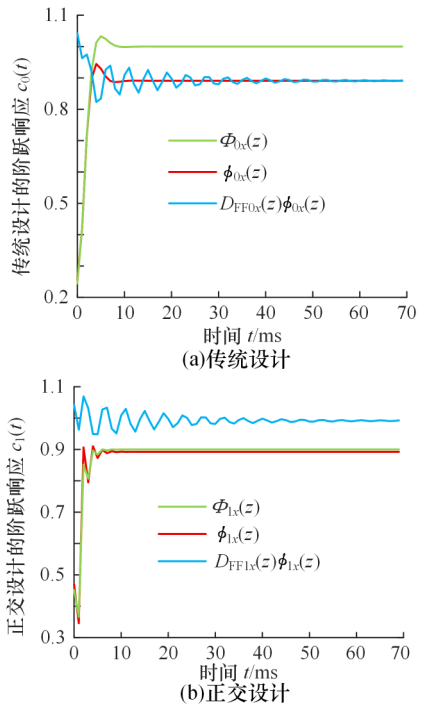


图4 机床两种x轴系统的单位阶跃响应

Fig.4 The step responses of the 2 X-axis systems

动对象”的鲁棒性。为进一步评估系统性能，现用蒙特卡洛法(Monte Carlo method，MCM)仿真反馈-前馈系统的平面圆腔加工，分析铣床X-Y轴联动时的加工误差分布规律，并在大数定律意义下对系统性能作统计评估。设待加工平面圆腔的圆心为$O(O_x, O_y)$、半径为50mm。用步长10μm的逐点比较法对该圆进行插补，生成离散输入序列$r_x(n)$、$r_y(n)$，其中，$n=1,2,\cdots,N$。

仿真方法与步骤如下：

(1)设定模型不确定度σ，采用3.1节方法在计算机上生成如式(18)的“实际对象”$g_x(z)$，分别构造图3c、图3d所示的X轴两种复合系统，并用同样方法构造Y轴的两种复合系统。

(2)在第j次仿真中，分别计算各复合系统对$r_x(n)$、$r_y(n)$的输出序列$c_x(n)$、$c_y(n)$。将圆腔加工尺寸误差$e_{R,j}$与轮廓误差$e_{C,j}$

$$\left.\begin{aligned} e_{R,j}&=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|(50-|\boldsymbol{P}_n-\boldsymbol{O}|)| \\ e_{C,j}&=\max|50-|\boldsymbol{P}_n-\boldsymbol{O}|| \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{P}_n$为刀尖轨迹，$\boldsymbol{P}_n=(c_x(n),c_y(n))$。

用于表征加工精度。

对每个σ仿真5万次，表1、表2所示为不确定度仿真结果的均值与方差。

由表1、表2可知，机床不确定度越大，圆腔的尺寸误差与轮廓误差越大；σ较大时，系统虽然可能失稳，但正交系统仍能使加工误差的均值与标准差随σ近似单调增长；σ相同时，传统系统加工

表1 传统系统加工误差的均值$\bar{e}$与方差σ^2

σ/%	$\bar{e}_R$/mm	σ_R^2/mm^2	$\bar{e}_C$/mm	σ_C^2/mm^2
3	3.072	4.7	8.132	37.428
10	14.954	4323.843	36.719	15 842.243
30	77.857	139 311.07	160.982	484 660.143

表2 正交系统加工误差的均值$\bar{e}$与方差σ^2

σ/%	$\bar{e}_R$/mm	σ_R^2/mm^2	$\bar{e}_C$/mm	σ_C^2/mm^2
3	1.766	1.237	4.371	8.893
10	6.051	19.805	14.848	132.707
30	14.48	116.986	33.875	560.559

误差的均值远大于正交系统，方差更是正交系统的数倍乃至数百倍。这表明，传统复合系统的传递函数$D_{FF0}(z)\phi_0(z)$不但远未实现接近1的理想目标，还有很大不确定度；正交反馈与前馈补偿相结合的传递函数$D_{FF1}(z)\phi_1(z)$始终接近1，有效减小加工误差的均值，大幅抑制加工误差的方差，刀具轨迹跟随能力强于传统系统。

3.3 机床加工实验

相较于条件可知可控的计算机仿真，机床的实际模型及其不确定度均不可知。在机床上进行X-Y平面切削加工，通过比较两种复合系统的加工质量来评价它们的实际鲁棒性，进一步验证MCM仿真的结论。

3.3.1 实验方案

采用图2所示的铣床加工半径50 mm的圆腔，铣床名义传递函数为式(16)。采用双光栅尺的全闭环测头动态位移检测方案：安装在主立柱、副立柱的光栅尺检测值分别为x与x'，则$\theta_1\approx(x-x')/Y_{A2}$；安装在龙门架横梁上下侧的光栅尺检测值分别为$y'$与$y$，则$\theta_2\approx(y-y')/H$，其中，$H$为上下两光栅尺的距离。根据2.1节所述动力学系统的几何关系估计测头位移：$c_x\approx x-y\theta_1$，$c_y\approx y_i+Z_2\theta_2$。

3.3.2 状态观测器设计

针对被控对象状态空间模型(式(4))，采用预报观测器进行状态重构：

$$\hat{\boldsymbol{v}}(n+1)=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{HL}-\boldsymbol{K}_v\boldsymbol{P})\hat{\boldsymbol{v}}(n)+\boldsymbol{K}_v\boldsymbol{c}(n)+\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}(n) \tag{20}$$

状态的重构误差为

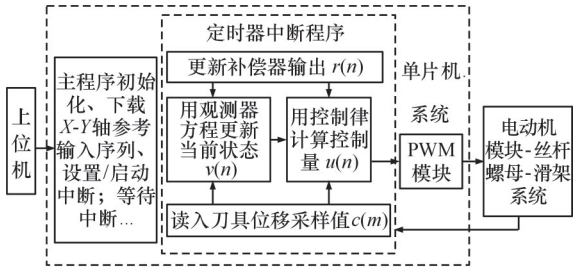
$$\boldsymbol{e}_v(n+1)=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{K}_v\boldsymbol{P})\boldsymbol{e}_v(n)+(k_r\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M})r(n)$$

故取$\boldsymbol{M}=k_r\boldsymbol{H}$使重构误差与$r(n)$无关。为获得最快的重构误差收敛，采用最少拍设计：将重构误差特征方程$|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}+\boldsymbol{K}_v\boldsymbol{P}|=0$的根全部配置于$z$平面原点，并将对象系统矩阵$\boldsymbol{F}$与输出矩阵$\boldsymbol{P}$代入重构误差特征方程，可得$X$、$Y$两轴的最少拍观测器增益矩阵$\boldsymbol{K}_{vx}=[-0.6288\quad 1.1926]$和$\boldsymbol{K}_{vy}=[0.1863\quad 0.4734]$。

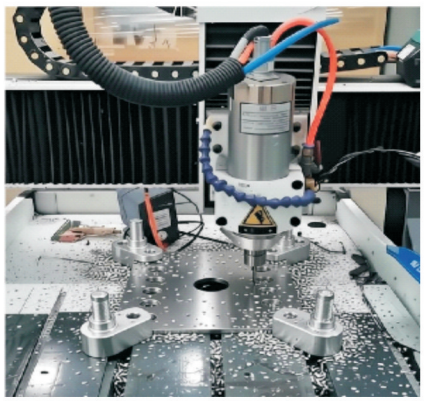
3.3.3　控制系统的实现

单片机通过串口与上位PC机连接。上位PC机将两轴插补后的参考输入序列下载到单片机存储器。单片机用作控制器，在定时器中断程序中计算补偿序列与状态反馈序列，同步控制两轴加工，中断间隔设为1 ms以实现1 ms的采样周期。

在同一台铣床上进行传统复合系统与正交复合系统的切削实验。实验时，先将各轴的反馈控制器、前置控制器与观测器的差分方程写入单片机定时器中断程序，再进行切削加工。进入中断后，程序依次执行如下操作：前馈控制器更新当前的补偿值；读入光栅尺检测的刀具位置，由观测器估计系统状态；按控制律计算控制量，控制量经PWM模块输出至电动机驱动模块，控制刀具运动直到完成加工。主要功能流程如图5a所示，图5b所示为加工现场。



(a)复合控制系统功能与控制流程



(b)铣床加工实验现场

图5　铣床复合控制系统与加工实验

Fig.5　The composite control system of milling machine and processing experiments

3.3.4　实验结果与分析

实验用工件为6061-T6铝合金板，刀具为3刃 ϕ10 mm硬质合金立铣刀，主轴转速为12 000 r/min，进给速度为1200 mm/min，切削深度为2 mm。

系统跟随误差为刀具的两轴位移检测值序列 $c_{ia}(n)$ 与参考输入序列 $r_a(n)$ 之差 $e_{ia}=c_{ia}(n)-r_a(n)$，$i=0,1$；$a=x,y$。如图6所示，两种系统误差曲线轮廓相似，但正交系统的误差更小。传统系统与正交系统各进行20次圆腔切削后，用坐标测量机测量零件的圆腔轮廓。计算圆腔尺寸误差 e_R 与轮廓误差 e_C 时，工件的参考圆心不可得，故用加工轮廓拟合圆心代替参考圆心，各误差的统计值列于表3。

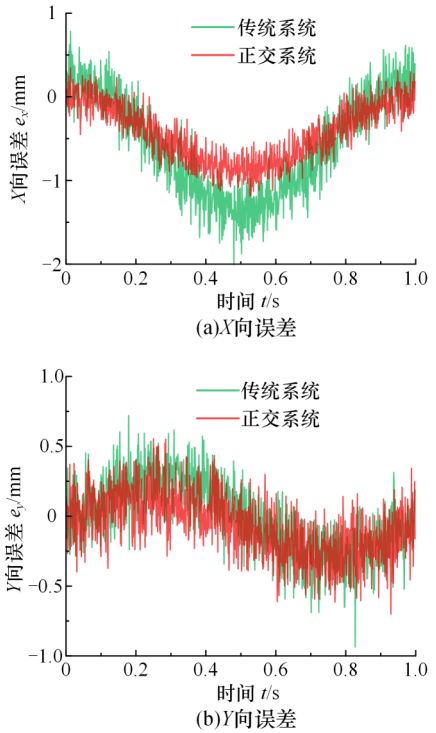


图6　机床两种系统的加工误差

Fig.6　The machining errors of the 2 systems

表3　机床加工误差的均值 $\bar{e}$ 与方差 σ^2

	$\bar{e}_R$/mm	σ_R^2/mm^2	$\bar{e}_C$/mm	σ_C^2/mm^2
e_0	0.882	0.3	2.305	2.421
e_1	0.507	0.1	1.288	0.659

表3中的加工误差比表1、表2的对应仿真值小，这可能是因为仿真出现了闭环失稳发散。各次切削实验结果（加工误差均值与方差）也互不相同，表明机床的实际模型不仅与名义模型有差异，还有一定的不确定性变异[24]。正交系统的加工误差统计值均小于传统系统，证明了正交反馈-前馈设计对增强系统鲁棒性有实际效果，更好地抑制了机床各种不确定度的影响，提高了加工质量。实验结果验证了仿真所得“正交反馈与前馈补偿相结合的复合系统能有效减小加工误差”的结论。

4　结论

机床不确定度使低正交度系统偏离名义闭环，无法实现前馈-反馈复合系统传递函数接近1的目标，弱化前馈补偿效果，达不到预期的控制性能。

正交反馈抑制对象模型摄动对闭环的影响，实现系统鲁棒性，但正交鲁棒性可能与零稳态误差等其他性能要求相冲突。此时，可先增大稳态误差指标以设计出正交闭环，再引入前馈补偿以消除正交鲁棒性对稳/动态性能的限制。由此，正交闭环设计与前馈补偿相结合，共同提高机床鲁棒性与控制性能。

正交设计提升鲁棒性具有条件性，即大时变或大不确定度下，实际闭环正交度可能偏离名义值，导致系统鲁棒性下降。如何维持大不确定度系统的正交性并实现自适应前馈控制器，有待进一步研究。

参考文献：

[1] HOYO Á, HÄGGLUND T, GUZMÁN J L, et al. A Practical Solution to the Saturation Problem in Feedforward Control for Measurable Disturbances[J]. Control Engineering Practice, 2023, 139: 105636.

[2] REN Chao, LI Xiaohan, YANG Xuebo, et al. Extended State Observer-based Sliding Mode Control of an Omnidirectional Mobile Robot with Friction Compensation[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(12): 9480-9489.

[3] 魏琼，焦宗夏，王君，等. 基于LuGre模型的气动位置伺服系统摩擦补偿控制[J]. 机械工程学报，2018，54(20)：131-138.
WEI Qiong, JIAO Zongxia, WANG Jun, et al. Control of Pneumatic Position Servo with LuGre Model-based Friction Compensation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(20): 131-138.

[4] 陈景文，王培瑞，王红艳，等. 基于负载转矩观测器的PMSM前馈变补偿策略[J]. 电力电子技术，2021，55(8)：47-50.
CHEN Jingwen, WANG Peirui, WANG Hongyan, et al. Feedforward Variable Compensation Strategy of PMSM Based on Load Torque Observer[J]. Power Electronics, 2021, 55(8): 47-50.

[5] LIU Lu, TIAN Siyuan, XUE Dingyu, et al. Industrial Feedforward Control Technology: a Review[J]. Journal of Intelligent Manufacturing, 2019, 30(8): 2819-2833.

[6] DAI Luyao, LI Xin, ZHU Yu, et al. Quantitative Tracking Error Analysis and Feedforward Compensation under Different Model-based Feedforward Controllers in Different Control Architectures[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2021, 68(1): 381-390.

[7] 陈兴林，刘川，周乃新，等. 基于ZPETC-FF和DOB的精密运动平台控制[J]. 哈尔滨工业大学学报，2014，46(1)：1-6.
CHEN Xinglin, LIU Chuan, ZHOU Naixin, et al. Controller Design Based on ZPETC-FF and DOB for Precision Motion Platform[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2014, 46(1): 1-6.

[8] PRATIK P, BHENDE C N. Pole - Zero Placement Based Feed-forward Damping Control for Virtual Synchronous Generators in Power Systems with Inverter-based Resources[J]. Electric Power Systems Research, 2026, 256: 112899.

[9] HUANG Tiexiong, HU Guangdi, YAN Yan, et al. Combined Feedforward and Error-based Active Disturbance Rejection Control for Diesel Particulate Filter Thermal Regeneration[J]. ISA Transactions, 2023, 134: 28-41.

[10] NGUYEN-KHAC H M, ALYOUSSEF F, BECH A, et al. Advanced Feedforward Control Techniques: Comprehensive Review and a Real-time Industrial Application[J]. Annual Reviews in Control, 2026, 61: 101044.

[11] 李彪，李璐，李佳雨，等. 引入前馈的航天机电伺服系统复合控制技术[J]. 航天控制，2024，42(5)：23-29.
LI Biao, LI Lu, LI Jiayu, et al. Composite Control for Aerospace Electromechanical Servo Systems with Feedforward[J]. Aerospace Control, 2024, 42(5): 23-29.

[12] 王浩伟. 直升机模型跟踪变稳控制原理分析与仿真研究[J]. 自动化应用，2024，65(3)：89-91.
WANG Haowei. Analysis and Simulation Research on the Principle of Helicopter Model Following Variable Stability Control[J]. Automation Application, 2024, 65(3): 89-91.

[13] 唐钰. 基于模型跟踪的交流伺服系统控制技术研究[D]. 武汉：华中科技大学，2021：38-60.
TANG Yu. Research on Control Technology of AC Servo System Based on Model Tracking[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2021: 38-60.

[14] 张海洋，李继方，熊军华，等. 基于扩张状态观测器的永磁同步电机二自由度PI控制[J]. 电机与控制应用，2021，48(5)：40-45.
ZHANG Haiyang, LI Jifang, XIONG Junhua, et al. Control Strategy for Permanent Magnet Synchronous Motor with 2-DOF PI Control Based on ESO[J]. Electric Machines & Control Application, 2021, 48(5): 40-45.

[15] SZCZEPANSKI R, TARCZEWSKI T, GRZESIAK L M. Application of Optimization Algorithms to Adaptive Motion Control for Repetitive Process[J]. ISA Transactions, 2021, 115: 192-205.

[16] 王晓宇，李永基，孔德安. 基于前馈补偿和FOPID的火电机组调频优化控制策略研究[J]. 热能动力工程，2026，41(4)：129-138.
WANG Xiaoyu, LI Yongji, KONG Dean. Research on Frequency Regulation Optimization Control Strategy for Thermal Power Unit Based on Feedforward Compensation and FOPID[J]. Journal of Engineering for Thermal Energy and Power, 2026, 41(4): 129-138.

[17] 黄科元，周滔滔，黄守道，等. 含前馈补偿和微分反馈的数控位置伺服系统[J]. 中国机械工程，2014，25(15)：2017-2023.
HUANG Keyuan, ZHOU Taotao, HUANG Shoudao, et al. CNC Position Servo System with Feedforward Compensation and Differential Feedback[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(15): 2017-2023.

[18] 陆浩，胡建华，王云宽，等. 基于自适应微分跟踪器的位置伺服系统[J]. 中国机械工程，2016，27(21)：2915-2919.
LU Hao, HU Jianhua, WANG Yunkuan, et al. Position Servo System Based on Adaptive Tracking-differentiator Controller[J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(21): 2915-2919.

[19] 叶伯生，谭帅，黎晗，等. 基于跟踪微分器的移动机器人轨迹规划与跟踪控制研究[J]. 机床与液压，2022，50(11)：1-7.
YE Bosheng, TAN Shuai, LI Han, et al. Research on Trajectory Planning and Tracking Control of Mobile Robot Based on Tracking Differentiator[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2022, 50(11): 1-7.

[20] 韦进文，覃禾群，等. 基于广义叉积鲁棒性的识别式数据拟合[J]. 机械工程学报，2011，47(14)：7-12.

（下转第1733页）